A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT III r., sem. letni

ZADANIA NA OCENĘ CELUJĄCĄ, ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Wrocław, 24 czerwca 2011

ZADANIE 1. Udowodnij, że w dowolnej przestrzeni unormowanej V każdy ciąg zbieżny słabo jest ograniczony w normie.

ROZWIĄZANIE: Weźmy ciąg (x_n) nieograniczony w normie. Wybierając podciąg można założyć, że ciąg $a_n := \sqrt{\|x_n\|}$ rośnie tak szybko, że $\frac{1}{a_n}$ jest co najmniej dwukrotnie większy od sumy

$$\sum_{i>n} \frac{1}{a_i}$$

(np. ciąg $a_n = 3^n$ ma tę własność). Niech f_n będzie funkcjonałem (o normie 1) wyciągającym normę x_n, tzn. $f_n(x_n) = \|x_n\| = a_n^2 > 0$. W przestrzeni funkcjonałów tworzymy szereg

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n f_n}{a_n},$$

gdzie α_n są liczbami o module 1 (za chwilę podamy jak dobranymi). Ponieważ a_n rośnie co najmniej wykładniczo, to szereg ten jest bezwzględnie zbieżny, a więc zbieżny (przestrzeń funkcjonałów jest zawsze zupełna), czyli f jest poprawnie zdefiniowanym funkcjonałem ograniczonym.
Liczby α_n dobieramy indukcyjnie: α_1 jest dowolna (np. 1). Załóżmy, że dobraliśmy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Wtedy patrzymy na argument liczby

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i f_i(x_n)}{a_i}$$

i dobieramy α_n tak aby liczba $\alpha_n f_n(x_n)$ miała taki sam argument. Wtedy mamy

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i f_i(x_n)}{a_i}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i f_i(x_n)}{a_i}\right| + \left|\frac{\alpha_n f_n(x_n)}{a_n}\right| \geq \left|\frac{\alpha_n f_n(x_n)}{a_n}\right| = \frac{f_n(x_n)}{a_n} = a_n.$$

Teraz najważniejsze. Jeśli do funkcjonału $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i f_i}{a_i}$ dodamy wszystkie dalsze wyrazy szeregu (czyli dojdziemy do granicznego funkcjonału f), to norma tego co dodamy nie przekroczy połowy $\frac{1}{a_n}$, a więc po nałożeniu tego funkcjonału na x_n (o normie a_n^2) jego wartość zmieni się (co do modułu) o co najwyżej $\frac{a_n}{2}$, a to oznacza, że $|f(x_n)|$ zostanie co najmniej $\frac{a_n}{2}$. Czyli nasz funkcjonał graniczny f na ciągu x_n ucieka z modułami do nieskończoności, co oznacza, że ciąg (x_n) nie może być słabo zbieżny.

ZADANIE 2. Udowodnij, że w ośrodkowej nieskończenie-wymiarowej przestrzeni Hilberta sfera jednostkowa (normowa) $S = \{x : \|x\| = 1\}$ jest słabo gęsta w domkniętej kuli jednostkowej (normowej) $K = \{x : \|x\| \leq 1\}$.

ROZWIĄZANIE: Nasza przestrzeń Hilberta jest izometrycznie izomorficzna z ℓ^2, więc zadanie wystarczy rozwiązać w ℓ^2. Niech $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ będzie elementem kuli jednostkowej K. Mamy

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \leq 1,$$

zatem, oczywiście, dla każdego $k \geq 1$ mamy $\sum_{i=1}^{k-1} |x_i|^2 \leq 1$. Więc istnieją liczby nieujemne b_k, nie większe od 1 takie, że

$$\sum_{i=1}^{k-1} |x_i|^2 + b_k^2 = 1.$$

Teraz definiujemy $x^{(k)}$ następująco:

$$x^{(k)} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, b_k, 0, 0, 0, 0, \dots),$$

czyli na pierwszych $k-1$ współrzędnych jest tak jak w x, potem jest liczba b_k tak dobrana, aby $x^{(k)}$ miał normę 1, czyli należał do sfery jednostkowej S (a potem zera). Pokażemy, że $x^{(k)}$ zbiega słabo do x (po k). Ustalmy dowolny funkcjonał P na ℓ^2. Jest to iloczyn skalarny z pewnym elementem $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell^2$: $P(z) = \langle z|y \rangle$. A więc

$$P(x^{(k)}) = \langle x^{(k)}|y \rangle = \sum_{i=1}^{k-1} x_i y_i + b_k y_k \text{ (plus zera)} \quad \xrightarrow[k \to \infty]{} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \langle x|y \rangle = P(x),$$

bowiem wyraz $b_k y_k$ zbiega do zera (b_k jest ograniczony przez 1, a y_k zbiega do zera, bo to jest wyraz ciągu sumowalnego z kwadratem). Dowiedliśmy słabej zbieżności elementów $x^{(k)}$ do x. Koniec.